Probabilidade de Default

Rafael Paschoarelli, INSPER e FEA-USP
Doutor em Administração pela FEA-USP
rpaschoarelli@yahoo.com

Milton Sanches, FEA-USP
Mestre em Administração pela FEA-USP
msanches@usp.br

Probabilidade de Default

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um método de obtenção da probabilidade de default empregando processo estocástico via Simulação de Monte Carlo (MC) em substituição ao modelo de CRR (1979).

O desenvolvimento de ferramental para a mensuração do risco de crédito é de interesse tanto de acadêmicos, agentes econômicos, reguladores e supervisores do sistema financeiro. Nesse sentido, a mensuração de risco de crédito de instrumentos financeiros complexos é de interesse estratégico desses agentes e o presente artigo pretende contribuir neste sentido.

A publicação do trabalho de apreçamento de opções europeias por Black & Scholes (BS) em 1973 ensejou a criação de diversos modelos de quantificação de risco de crédito utilizando teoria de opções. Merton (1974) desenvolveu uma metodologia para obter a probabilidade de *default* de uma empresa usando BS.

Um dos desafios mais importantes do modelo é a obtenção da volatilidade dos ativos da empresa a partir da volatilidade do patrimônio líquido a mercado da empresa. Um dos principais limitantes para o emprego do modelo na vida real é a premissa da dívida da empresa estar concentrada em uma única data de vencimento. No final dos anos 1980, o modelo de Merton foi adaptado para o mundo corporativo por uma empresa especializada em análise quantitativa de risco de crédito denominada *KMV Corporation*, posteriormente adquirida pela agência de risco *Moody´s* em 2002. O Modelo *Moody´s KMV* (ou simplesmente KMV) introduz novas premissas de modo a simplificar o problema de dívida concentrada e também requer o emprego de uma base de dados proprietária da *Moody´s* de modo a se converter o parâmetro *Distance to Default* (DD) em uma probabilidade de *default*. Mais recentemente, a literatura sobre o assunto foi enriquecida com o emprego do modelo CCR de Cox, Ross e Rubinstein (1979) em substituição ao de BS.

Paschoarelli (2006) apresentou uma solução para o problema utilizando árvores binomiais no cálculo da probabilidade de *default* de empresas com dívidas que não sejam zero cupom empregando uma metodologia alternativa para se derivar a volatilidade dos ativos a partir da volatilidade do patrimônio líquido a mercado da empresa.

Palavras-chave: Probabilidade de Default, Monte Carlo, Risco de Crédito.

Probabilidade de Default

This work aims to present a method for obtaining the default probability deploying stochastic process through Monte Carlo simulation (MC) to replace the CRR model (1979).

The development of tools for the measurement of credit risk is of key interest of both academics, economic agents, regulators and supervisors of the financial system. In this sense, the assessment of credit risk of complex financial instruments is of strategic interest of these agents and this article aims to contribute to this.

The release of the option pricing model by Black & Scholes (BS) in 1973 prompted the creation of several models for quantifying credit risk using options theory. Merton (1974) developed a methodology to obtain the default probability of a company using the BS model.

One of the most important challenges of the model is to obtain the volatility of the company's assets from the volatility of the company´s equity market. A major factor limiting the application of the model in real life is the premise of the company's debt being concentrated on a single due date. In late 1980, the Merton model was adapted to the corporate world by a company specializing in quantitative analysis of credit risk called KMV Corporation, later acquired by agency Moody's in 2002 . The Moody's KMV Model (or simply KMV) introduces new assumptions to simplify the problem of debt concentrated on a single due date and also requires the use of a proprietary database of Moody's in order to convert the parameter Distance to Default (DD) on a probability of default . More recently, the literature on the subject has been enriched with the use of the CCR model of Cox, Ross and Rubinstein (1979) to replace the BS.

Paschoarelli (2006) presented a solution to the problem using binomial trees in the calculation of the probability of default of companies with debts that are not zero coupon using an alternative methodology to derive the asset volatility from the volatility of the equity market to the company.

Keywords: Probability of Default, Monte Carlo, Credit Risk.

DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E OBJETIVOS DO TRABALHO

Dentro de um banco, a modelagem de risco de crédito depende de diversos fatores. Apenas para citar alguns, pode-se dizer que o departamento de risco de crédito de instituições financeiras segrega o tomador em pessoa física ou jurídica e, se jurídica, a modelagem dependerá se a empresa é de pequeno ou grande porte e levará em conta aspectos como qualidade das garantias, percentual da garantia em relação ao crédito pleiteado, cobertura de juros, alavancagem da empresa, entre outros fatores.

Considerando cursos de graduação ou de especialização sobre análise de risco de crédito é comum que o conteúdo programático aborde modelos baseados em dados provenientes das demonstrações financeiras da empresa como fluxo de caixa, EBITDA, alavancagem, entre outros. Possivelmente, a metodologia precursora desta abordagem e que alcançou maior sucesso tenha sido introduzida por Altman (1968) em que a insolvência da empresa era prevista empregando análise discriminante multivariada a partir de quocientes contábeis. O modelo de Altman inspirou vários trabalhos brasileiros nesta linha como os de Elisabetsky (1976), Kanitz (1978) e de Pereira da Silva (2001).

No âmbito acadêmico, considerando pessoa jurídica como tomadora do crédito, os últimos 30 anos foram pródigos em apresentar sofisticados modelos de risco de crédito baseados em modelagens matemáticas e estatísticas.

Nesta linha de raciocínio, Delianedis e Geske (2001) segmentam os modernos modelos de risco de crédito na forma reduzida ou estruturais. Ambos pressupõem que o valor da firma ou do título de crédito segue um processo estocástico que permite a obtenção da probabilidade de default.

Ainda que não sejam abordados neste trabalho, os principais modelos na forma reduzida são Duffie e Singleton (1999), Hull e White (2000) e Jarrow e Turnbull (1995).

O primeiro representante de modelo na forma estrutural de primeira geração aplicado a risco de crédito é o modelo de Merton (1974). Segundo Merton, o processo de default da firma é dirigido pelo valor dos ativos da companhia e o risco de default decorre da variabilidade dos seus ativos.
Conquanto tenha o mérito de ter inaugurado os modelos baseados em processos estocásticos, uma limitação importante do modelo de Merton é o fato de assumir que a dívida da empresa está concentrada em data única de vencimento.

Essa limitação era necessária pelo fato do modelo de precificação de opções empregado na época ser o de BS (1973) que calcula o valor justo de uma opção europeia que não paga dividendos. Para se conseguir calcular a probabilidade de default em múltiplos períodos de acordo com o vencimento de juros e principal, tal como ocorre na prática com as empresas, seria necessário alterar o modelo de precificação empregado.
O que é proposto neste trabalho é a substituição do modelo Cox, Ross e Rubinstein - CRR (1979) empregado por Paschoarelli (2006) por um método que se valha da Simulação de Monte Carlo (MC).

Nos trabalhos de Merton (1974) e Paschoarelli (2006), empregou-se a seguinte fórmula de modo a se obter a volatilidade dos ativos da empresa derivada diretamente do modelo de BS (1973):

$$\sigma = \frac{\sigma_E * E_t}{V_t * N(d)} \qquad \text{[Equação 1]}$$

Onde:

σ = Volatilidade dos ativos da empresa;

σ_E = Volatilidade do patrimônio líquido a mercado da empresa;

E_t = Valor do patrimônio líquido a mercado da empresa;

V_t = Valor do ativo a mercado da empresa;

$N(d)$ = Distribuição normal padronizada acumulada até d;

$$d = \frac{1}{\sigma_E\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{V_t}{D_t}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_E^2\right) * T\right]$$

D_t = Valor da dívida da empresa em T;

T = Data de vencimento da dívida;

r = Taxa de juros livre de risco.

Contudo, a formulação acima descrita depende de várias premissas estabelecidas por BS (1973).

A contribuição deste artigo consiste em relaxar as premissas de BS (1973) utilizando um método mais simples que o empregado por Paschoarelli (2006) uma vez que a modelagem proposta emprega Simulação de Monte Carlo (MC), fato que permitirá que a estrutura da dívida possa ser mais complexa que a prevista por Merton (1974) e, por conseguinte, mais próxima de opções reais e da realidade das empresas.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: MODELO DE MERTON

Yeh, Lin e Hsu (2012) argumentam que os preços de mercado refletem fluxos de caixa esperados e, desta forma, devem ser mais úteis na predição de ratings de crédito.

O primeiro modelo de risco de crédito baseado na difusão dos preços de mercado é o de Merton (1974). O modelo estrutural de Merton assume que a firma tem estrutura de capital em que o passivo é constituído por um título zero cupom vencendo na data T com valor de face dado por $\mathrm{D_t}$ e pelo patrimônio líquido da firma expresso por $\mathrm{E_t}$.

O valor de mercado do patrimônio líquido é modelado por um processo estocástico. O possível default e a taxa de recuperação associada são determinados diretamente a partir do valor do mercado da firma no vencimento T. O default ocorrerá no momento T se o valor de mercado dos ativos da firma $\mathrm{V_t}$ for inferior a $\mathrm{D_t}$. Se no instante T o valor dos ativos for maior que $\mathrm{D_t}$, a empresa honrará sua obrigação.

Nas palavras de Schäfer e Koivusalo (2013), no modelo de Merton, o default e taxa de recuperação estão intrinsecamente relacionados.

Estas constatações levaram Merton a equiparar o valor do patrimônio líquido a mercado da empresa ao prêmio de uma opção de compra europeia com vencimento em T sobre os ativos da firma em que o preço de exercício é dado por $\mathrm{D_t}$. A probabilidade de default corresponde à probabilidade da opção não ter exercício.

De maneira a determinar esta probabilidade, Merton utiliza BS (1973) para o cálculo desta opção.

O primeiro grande desafio é descobrir a volatilidade dos ativos da empresa, algo que não é diretamente observável.

Segundo Crouhy et al. (2000), se todo o passivo da empresa fosse transacionado e marcado a mercado diariamente, então a tarefa de avaliar o valor de mercado dos ativos da firma e sua volatilidade seriam facilmente obtidos, pois, nesta situação, o valor dos ativos da firma seriam a soma dos valores de mercado do patrimônio líquido e com o valor de mercado de suas obrigações.

De maneira a resolver esta dificuldade, Merton utilizou a seguinte fórmula da Equação 1, derivável de BS (1973):

$$\sigma = \frac{\sigma_E * E_t}{V_t * N(d)} \qquad \text{[Equação 1]}$$

Segundo Paschoarelli (2006), seja $\mathrm{E_t}$ o valor do patrimônio líquido da firma, empregando a forma fechada do modelo de apreçamento de opções de modelo de BS (1973), tem-se que:

$$E_t = V_t * N(d) - \exp(rT) * D_T * N(d - \sigma\sqrt{T}) \qquad \text{[Equação 2]}$$

Onde:

$$d = \frac{1}{\sigma_E\sqrt{T}}\left[ln\left(\frac{V_t}{D_t}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_E^2\right) * T\right] \qquad \text{[Equação 3]}$$

Analisando as fórmulas acima, observamos que:

a) E_t é o valor a mercado do patrimônio líquido da empresa e é diretamente observável, supondo que a empresa tenha negociação em bolsa;

b) V_t é o valor a mercado dos ativos da empresa e é uma incógnita;

c) σ é a volatilidade dos ativos da empresa e é uma incógnita;

d) T é o tempo até o vencimento da obrigação zero cupom e é conhecido;

e) r é a taxa de juros livre de risco e é conhecida;

f) σ_E é a volatilidade do patrimônio líquido da empresa e é facilmente calculável.

Como se dispõe de duas incógnitas e duas equações, a descoberta dos parâmetros restantes é trivial.
Briys *et al*. (1998, p. 64-68) afirmam que $N(d - \sigma\sqrt{T})$ é a probabilidade da opção de compra ter exercício.
Portanto, $1 - N(d - \sigma\sqrt{T})$ é a probabilidade da opção de compra não ter exercício.
Como limitações do modelo de Merton (1974), pode-se citar o quanto segue:

a) Todas as premissas usadas por BS (1973) devem ser respeitadas;

b) A dívida da empresa é representada por um título zero cupom vencendo em T.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: MODELO KMV

A empresa KMV é um bom exemplo de sucesso de um negócio baseado em conhecimento e que acabou sendo vendido para a *Moody´s* em 2002 por mais de US$ 210MM. Um sistema concorrente é o *Credit Metrics* do JP Morgan. Segundo Crouhy *et al*. (2000), tanto o KMV como o *Credit Metrics* do JP Morgan baseiam-se no Modelo de Merton (1974), contudo, diferem substantivamente nas premissas simplificadoras necessárias para a implementação das ideias centrais de Merton. Segundo os referidos autores, se e como estas simplificações comprometem uma satisfatória captura da medida do risco de crédito permanecem uma questão em aberto.

A primeira simplificação adotada pelo KMV é assumir que a estrutura de capital da firma é composta por capital próprio, dívida de curto prazo e dívida de longo prazo na forma de uma perpetuidade conversível em ações preferenciais. Crouhy *et al*. (2000, p. 88).

KMV calcula uma medida denominada *DD* (*Distance to Default*) que corresponde ao número de desvios entre o valor dos ativos da empresa e o ponto de *default* obtido a partir da seguinte formulação:

$$DD = Distância\ para\ o\ Default = \frac{E(V_T) - DPT}{\sigma}$$ [Equação 4]

Onde:

$DPT = Ponto\ de\ Default = STD + \frac{1}{2} * LTD$

$STD = Dívida\ de\ curto\ prazo$

$LTD = Dívida\ de\ longo\ prazo$

Assumindo a lognormalidade dos retornos dos ativos, Crouhy *et al*. (2000, p. 90) afirmam que:

$$DD = \frac{ln\left(\frac{V_t}{DPT_t}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$ [Equação 5]

Sendo μ o retorno esperado para o ativo da firma.

Ainda assumindo distribuição lognormal, a probabilidade de *default* é igual a $N(-DD)$, sendo $N(.)$ a distribuição lognormal acumulada entre menos infinito e $-DD$.
Contudo, a abordagem do KMV não utiliza esta equação para o cálculo da probabilidade de *default.* Alternativamente, a medida DD é usada para se obter a *Expected Default Frequency* (EDF) a partir de dados históricos.

Crouhy *et al*. (2000) exemplificam esta abordagem afirmando que supondo que 0,4% das firmas com $DD = 4$ entraram em *default* dentro de um ano, o EDF desta firma em particular é de 0,4% considerando um ano. Percebe-se claramente que uma dificuldade na utilização do KMV é justamente o banco de dados que associa a cada DD a um EDF. Adicionalmente, deve-se ter em mente que este banco de dados também permite utilizar o parâmetro prazo.

METODOLOGIA

O modelo proposto por Merton (1974) para o cálculo da probabilidade de *default*, parte da analogia de que o valor do patrimônio líquido de uma companhia é igual ao valor de uma opção de compra dos ativos de uma companhia, com múltiplos preços e datas de exercícios, caracterizados pelos montantes das dívidas da empresa em cada uma das datas de exercício.

O ativo adjacente ao derivativo modelado é representado pelo valor dos ativos da companhia e a cada data de pagamento de dívida, este é reduzido do montante da dívida paga, ou no limite, se o ativo não for suficiente para o pagamento das dívidas, é caracterizado o *default* da companhia e o valor desta opção é zero.

O processo proposto por Merton aproxima esta opção de uma opção europeia com um único evento de vencimento de dívida. No entanto, a natureza do problema real é muito mais complexa.

Neste trabalho utilizou-se uma abordagem de cálculo de opção de compra com múltiplas datas e preços de exercícios, semelhante ao modelo da modelagem binomial proposta por Paschoarelli (2006). Este modelo torna-se complexo do ponto de vista computacional pelo fato de não haver uma solução algébrica fechada conhecida para o problema. A contribuição deste trabalho é apresentar uma abordagem de Simulação de Monte Carlo (MC) para desenvolver os possíveis estados para o preço dos ativos da companhia aplicado ao mesmo problema.

Um processo estocástico pode ser compreendido como uma forma de descrever a evolução dos valores de uma variável ao longo do tempo de maneira aleatória e não previsível. Os processos estocásticos podem ser classificados como estacionários, quando as propriedades estatísticas (média e variância) da variável são constantes ao longo do tempo, ou não-estacionários, se não constantes.

Um processo de Markov é definido como o processo estocástico onde somente o valor atual de uma variável é relevante para se estimar os valores futuros (Capinsky *et al.*, 2012, p. 28). Esta premissa simplifica a análise dos processos estocásticos, como no caso do problema de preços de ações. O Processo de Wiener, ou Movimento Geométrico Browniano (MGB), é um tipo particular de Processo de Markov em que a variável aleatória possui média zero e taxa de variância de um. Assim, tudo que se precisa para fazer uma estimativa do valor futuro da variável estocástica é conhecer a sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual (Capinsky *et al.*, 2012, p. 40).

A simulação de Monte Carlo (MC) é um método numérico utilizado em muitos problemas onde uma solução algébrica fechada do problema não é conhecida. Boyle (1977) introduziu este método para o cálculo de uma opção do tipo europeia. O método é extremamente útil em uma série de processos estocásticos. A hipótese básica é de que o logaritmo natural dos preços de um ativo adjacente descreve um movimento geométrico Browniano. Neste processo o preço de um ativo S pode ser descrito da seguinte da forma:

$$S_t = S_{t-1} * exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz\right] \qquad \text{[Equação 6]}$$

Onde dz é um processo de Wiener com média 0 e desvio padrão 1.

Para simular este processo, utilizaremos os valores de S em um intervalo discreto de tempo, Δt. Assim podemos reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$S_t = S_{t-1} * exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\epsilon_t\sqrt{\Delta t}\right] \qquad \text{[Equação 7]}$$

Onde $\Delta S = (S_t - S_{t-1})$ é a mudança de estado no valor de S em um determinado intervalo de tempo Δt e $\epsilon_t \sim N(0,1)$.

Conhecidas as trajetórias de S no tempo é possível então avaliar o valor da opção em cada instante de tempo e, em particular, nas datas de eventos de crédito da companhia.
Desta forma, sendo j um instante particular de tempo onde o pagamento de dívida da empresa é efetuado, o valor de S_t pode ser reescrito da seguinte forma:

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} * exp\left(Drift + \epsilon_t \sigma \sqrt{\Delta t}\right), & t \neq j \\ \max\left(0, S_{t-1} * exp\left(Drift + \epsilon_t \sigma \sqrt{\Delta t}\right) - XF_j\right), & t = j \end{cases} \quad \text{[Equação 8]}$$

Onde o $Drift = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t$, $\epsilon_t \sim N(0,1)$ e XF_j é o valor futuro da dívida da companhia no instante j.

Nesta parametrização é simples perceber que quando ocorre o evento de *default*, isto é, se $S_{t-1} * exp\left(Drift + \epsilon_t \sigma \sqrt{\Delta t}\right) < XF_j$ o valor de S_t será zero deste instante em diante.
Além disto, como na parametrização proposta não estamos interessados nos valores de S_t nos instantes de tempo intermediários entre datas dos eventos de crédito e assim podemos simplificar o algoritmo avaliando somente o valor da opção nos instantes de tempo onde $t = j$.
Assim a Equação 8 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$S_j = \max\left(0, S_{j-1} * exp\left(Drift + \epsilon_t \sigma \sqrt{t_j - t_{j-1}}\right) - XF_j\right) \quad \text{[Equação 9]}$$

Onde j são datas de amortização da dívida da companhia.

Apesar de sua simplicidade, um dos problemas deste método é a necessidade de um processo computacional intensivo e de convergência lenta quando se utiliza números pseudo-aleatórios, gerados computacionalmente através de um algoritmo simples, como o nativo do Excel na sua função RND(). Estas sequências pseudo-aleatórias "parecem" números aleatórios, no entanto são gerados de forma determinística, explicando a adjetivo "pseudo", e em geral utilizando funções voláteis no sentido de que o valor inicial de uma sequência *(seed)* depende de um valor externo indeterminado obtido, por exemplo, através do relógio interno da máquina (Vose, 2000, p. 64).

Para se conseguir uma boa precisão é necessário aumentar o número de caminhos simulados. O erro padrão deste método é dado por $\frac{S}{\sqrt{n}}$ e é proporcional à raiz quadrada do número de simulações. Assim para se dobrar a precisão obtida em 10 mil simulações é necessário quadruplicar o número de simulações, o que muitas vezes nem sempre é possível ou viável (Niederreiter, 1992, p. 4 e Glasserman, 2004, p. 2). A utilização de números quase-aleatórios, apresentados a seguir, poderia, em casos ótimos, reduzir este erro de estimação para $\frac{S}{n}$ (Birge, 1995, p. 2).

Neste trabalho adotaram-se algumas técnicas numéricas para se melhorar a eficiência, precisão e velocidade de convergência da simulação de Monte Carlo, discutidas a seguir.

GERAÇÃO DE NÚMEROS QUASE-ALEATÓRIOS

Números aleatórios é uma etapa importante do modelo de simulação de Monte Carlo e um processo de geração de números eficiente pode melhorar a precisão e a velocidade do modelo. Birge (1995) e Joy *et al.* (1996) mostram que a eficiência do Método de Monte Carlo pode ser aumentada de maneira significativa se números quase-aleatórios forem utilizados em substituição a números pseudo-aleatórios. Essas sequências, também chamadas de sequências de baixa discrepância, são usadas para gerar amostras representativas das distribuições de probabilidade de que estamos simulando e, em vários casos permitem melhorar o desempenho de simulações de Monte Carlo, oferecendo menor tempo computacional e/ou menor variância.

Uma das técnicas para se gerar estas sequências de números quase-aleatórios foi proposta por Halton (1960) que tem como característica a uniformidade na distribuição dos números, evitando, problemas comuns à geração de números pseudo-aleatórios, como a ocorrência de lacunas e aglomerações (Galanti e Jung, 1997).

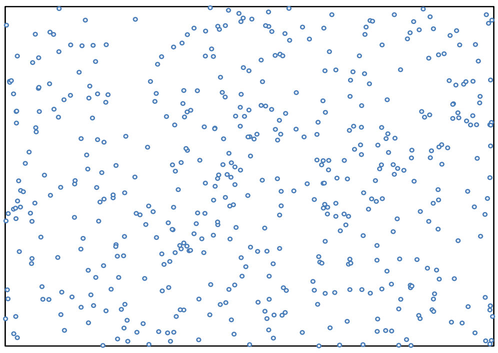
Outra sequência de baixa discrepância é a sequência de van der Corput (Equação 10). Uma sequência pseudo-aletória de Corput de base 2 é basicamente uma sequência de Halton de primeira ordem (Galanti e Jung, 1997).

$$Corput\ base\ b\ (n) = \sum_{j=0}^{m} a_j(n) b^j \quad \text{[Equação 10]}$$

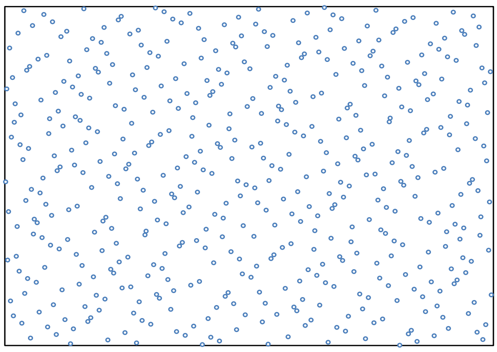
Onde m é o menor inteiro que atende $a_j(n) = 0$ para qualquer $j > m$.

A seguir apresentamos uma representação gráfica bidimensional deste tipo de dispersão em dois modelos diferentes de geração de números aleatórios:

Figura 1 - Dispersão aleatória bidimensional de 500 pontos utilizando diferentes funções aleatórias



Função Rnd() do Excel



Sequência Quase-Aleatória de Halton(2,3)

Fonte: Autores

O próximo passo é obter a função inversa da distribuição normal. Uma alternativa é a utilização da função nativa do Excel NORMSINV(). No entanto, a precisão desta inversão é muito pobre na região das caudas da distribuição e, em particular neste problema, onde os eventos de *default* ocorrem se utilizada a função nativa do Excel (McCullough e Wilson, 2002).

Uma forma conhecida de se obter a função inversa da distribuição Normal é o algoritmo de Box-Muller (1958) (Press *et al*. 1992):

$$\epsilon = cos(2\pi Z_1)\sqrt{-2\ln{(Z_2)}}$$ [Equação 11]

Onde Z_1e Z_2 são duas variáveis independentes uniformente distribuídas entre 0 e 1.

Entretanto este algoritmo também não é muito preciso nas caudas da distribuição (Glasserman, 2004, p. 67). Uma forma melhor de obter esta inversão com uma maior precisão nas caudas da distribuição é utilizando o algoritmo de Moro (Glasserman, 2004). Este algoritmo utiliza uma função hibrida na região central da distribuição $|y| \leq 0{,}42$ modelado por um algoritmo de Beasley e Springer e na parte das caudas $|y| > 0{,}42$ modeladas por series de Chebyschev (Moro, 1995 *apud* Glasserman, 2004).

Neste trabalho utilizou-se como gerador de números aleatórios a função van der Corput base 2 e a função hibrida de inversão da distribuição normal de Moro em 100.000 simulações. Também foi testado o efeito das funções nativas do Excel (RND e NORMSINV) com gerador de números aleatórios e de inversão da distribuição normal em 1.000.000 de simulações.

VARIÁVEIS ANTITÉTICAS

Técnicas de redução de variância são procedimentos que objetivam através da diminuição do desvio padrão da amostra aumentar a taxa de convergência do método (Guthke e Andras, 2012).

O método das variáveis antitéticas visa reduzir a variância através da introdução de pares de números aleatórios negativamente correlacionados pertencentes à mesma distribuição de probabilidade.

Nesta técnica um primeiro caminho é calculado de forma aleatória e então um segundo caminho, espelho do primeiro, é gerado. Estes dois caminhos são então utilizados para se avaliar o valor da opção e desta forma, ao gerarmos uma sequência estaremos gerando duas, diminuindo pela metade o número de caminhos simulados e o tempo de simulação.

Utilizamos esta técnica neste trabalho para reduzir a variância e o tempo de convergência do modelo e reescrevemos a Equação 9 da seguinte forma:

$$S_j = \max\left(0, S_{j-1} * exp\left(Drift + \epsilon_t \sigma \sqrt{t_j - t_{j-1}}\right) - XF_j\right)$$ [Equação 12]

E simultaneamente processamos o caminho espelho dado por:

$$S_j = \max\left(0, S_{j-1} * exp\left(Drift - \epsilon_t \sigma \sqrt{t_j - t_{j-1}}\right) - XF_j\right)$$ [Equação 13]

RESULTADOS

A fim de comparar este modelo com o modelo proposto por Paschoarelli (2006), aplicamos a modelo de simulação de Monte Carlo para Aracruz. As simulações foram repetidas com os mesmos parâmetros calculados por Paschoarelli (2006).

Os dados para o cálculo da volatilidade diária do patrimônio líquido foram obtidos a partir da volatilidade das ações negociadas em bolsa entre 01/03/2005 e 30/09/2005. O valor obtido foi de 1,688% ao dia útil.
O valor de mercado do patrimônio líquido da Aracruz foi obtido somando-se o valor de todas as ações da empresa, exceto aquelas em tesouraria em 30/09/2005. O valor obtido foi de R$ 8,655 bi.

O cronograma de pagamentos de dívidas da companhia era o seguinte:

Tabela 1 – Cronograma de amortizações da Aracruz

	Ano	Dívida a valor presente	Dívida a valor futuro
0	2005	R$ 360.100,00	R$ 360.100,00
1	2006	R$ 608.100,00	R$ 691.713,75
2	2007	R$ 868.600,00	R$ 1.123.886,97
3	2008	R$ 701.400,00	R$ 1.032.333,40
4	2009	R$ 444.100,00	R$ 743.509,28
5	2010	R$ 1.007.600,00	R$ 1.918.868,38

Fonte:Paschoarelli (2006)

O valor futuro da dívida foi calculado considerando-se um custo de remuneração da dívida de 13,75% a.a. e a taxa livre de risco à época era de 9,75% a.a.

Outro ponto importante do modelo é calibrar o valor inicial dos ativos da empresa. Isto é feito assumindo-se a hipótese de que o valor final da opção é igual ao valor do patrimônio líquido inicial (variável conhecida).
O valor inicial dos ativos da empresa é uma variável a ser obtida por um processo iterativo.

- Empregando o modelo binomial com árvore de 200 passos Paschoarelli (2006) obteve o valor de R$ 11.302 bi.
- Empregando modelo de simulação de Monte Carlo com 100.000 simulações, o presente trabalho encontrou o valor de R$ 13,016 bi.

A probabilidade de *default* pode então ser calculada computando-se a fração de simulações que geraram um evento de *default* dividido pelo total de simulações realizadas.

A tabela seguinte apresenta os resultados encontrados para os dois modelos:

Tabela 2 – Resultado comparativo (Modelo Binomial vs. Monte Carlo)

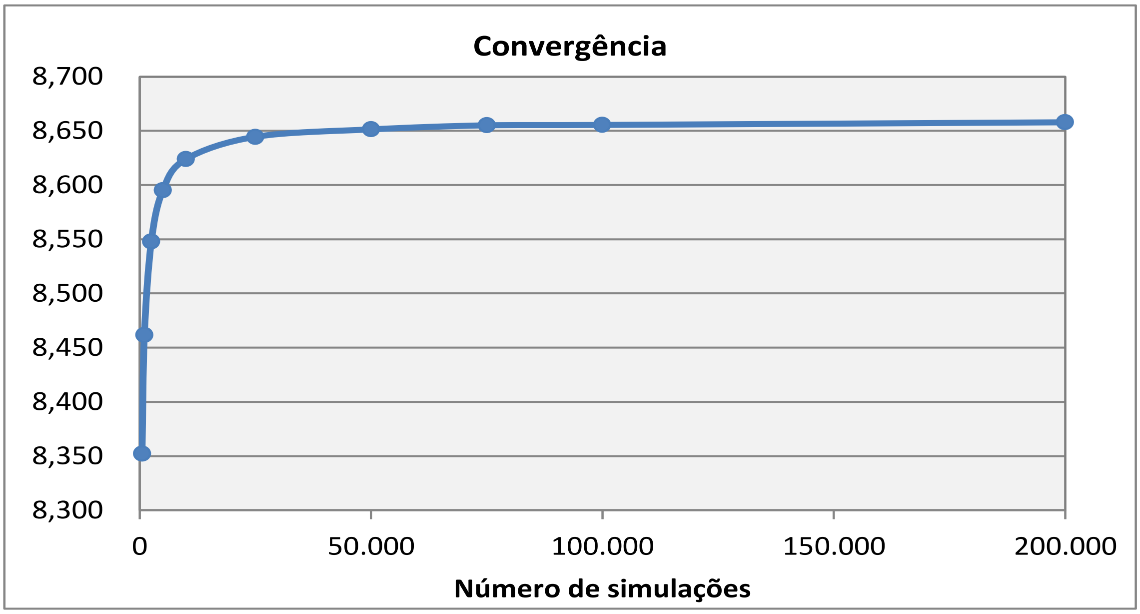
	CRR Paschoarelli (2006)	**Monte Carlo com gerador de Corbut base 2 e função inversa de Moro**	**Monte Carlo com gerador RND() e função inversa NORMSINV()**	**Comentário**
σ_E ao dia útil	1,68863%	1,68863%	1,68863%	Parâmetro de entrada
σ ao dia útil	1,11840%	1,12288%	1,12313%	Calculado a partir da Equação 1
C_o	R$ 8.655.488.620	R$ 8.655.488.620	R$ 8.655.488.620	Parâmetro de entrada
V_o	R$ 11.301.939.854	R$ 13.016.459.465	R$ 13.013.601.205	Valor estimado pelo modelo
VP da dívida	R$ 3.989.900.000	R$ 3.989.900.000	R$ 3.989.900.000	Parâmetro de entrada
r: Taxa livre de risco %aa	9,75%	9,75%	9,75%	Parâmetro de entrada
d: Custo da dívida %aa	13,75%	13,75%	13,75%	Parâmetro de entrada
Número de passos da árvore	200	6	6	Parâmetro do modelo
Número de simulações	-	100.000	1.000.000	Parâmetro do modelo
Probabilidade de *default*	0,0854%	0,7450%	0,7465%	Resultado do modelo

Fonte: Autores

Efetuou-se também uma análise de sensibilidade do preço da opção e também da probabilidade de *default* em função do número de simulações utilizadas na simulação de Monte Carlo. Neste caso repetiu-se a mesma análise com diferentes números de simulações.

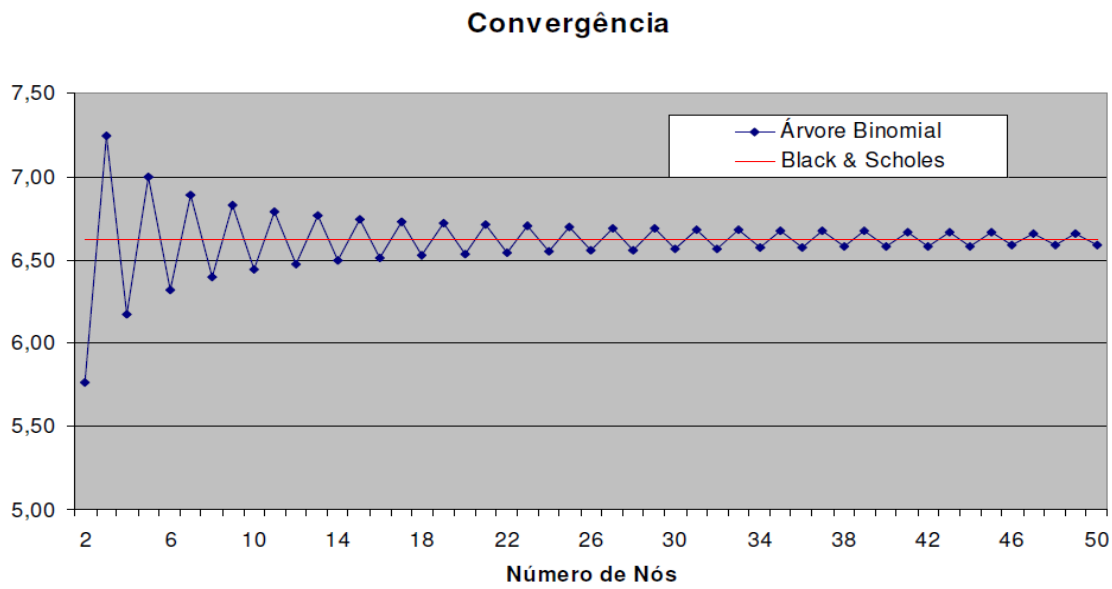
Uma análise análoga foi feita for Paschoarelli (2006) com relação ao número de nós da árvore binomial, verificando que no cálculo do preço de uma opção, esta definição é importante para que o modelo consiga convergir para o valor verdadeiro e que esta convergência é lenta e oscilatória.

Figura 2 – Evolução do preço da opção em função do número de simulações efetuadas (Monte Carlo – gerador aleatório de Corbut e função inversa de Moro)



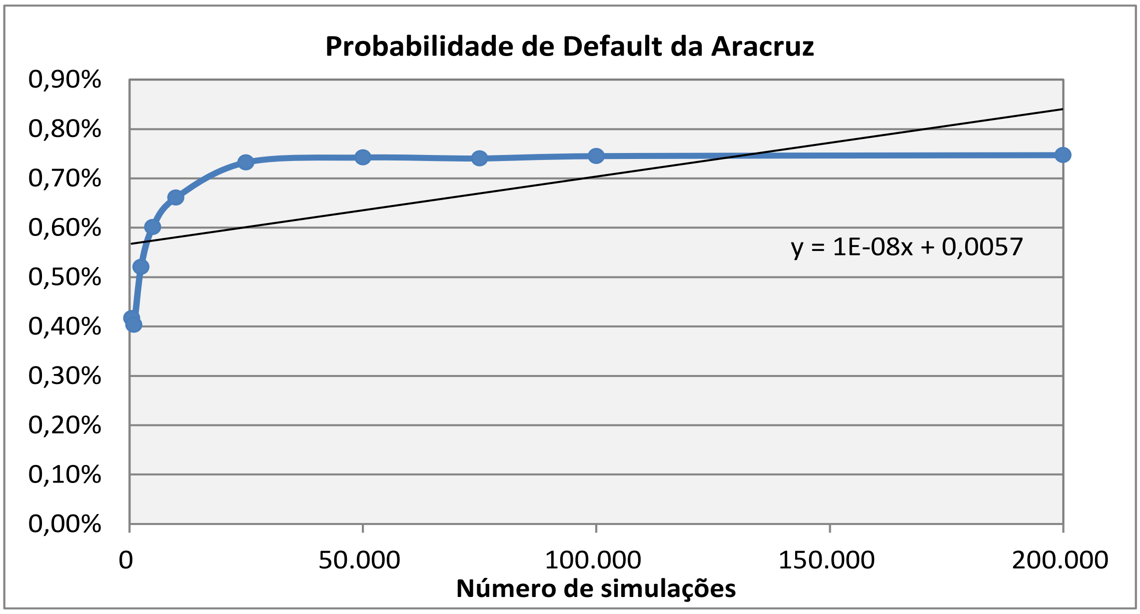
Fonte: Autores

Figura 3– Evolução do preço da opção em função do número de nós (Modelo CRR)



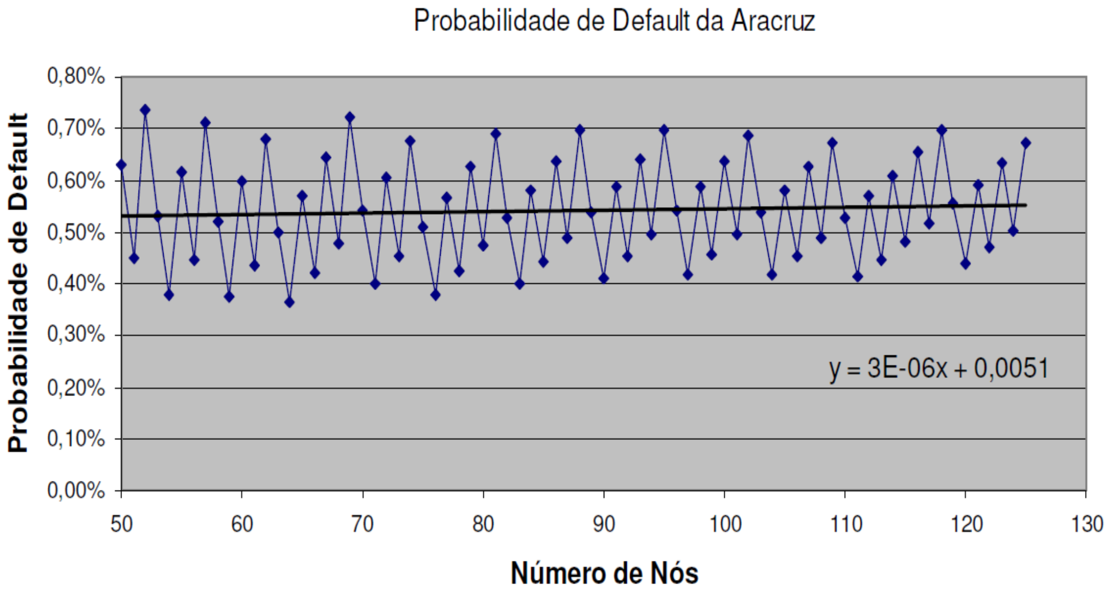
Fonte: Paschoarelli (2006)

Figura 4 – Evolução da probabilidade de default da Aracruz em função do número de simulações efetuadas (Monte Carlo – gerador aleatório de Corbut e função inversa de Moro).



Fonte: Autores

Figura 5 – Evolução do preço da opção em função do número de nós



Fonte: Paschoarelli (2006)

DISCUSSÃO

A modelagem empregada neste estudo foi, essencialmente, a mesma empregada por Paschoarelli (2006). O que difere os estudos é a ferramenta empregada. Enquanto aquele empregou árvores binomiais (CRR) o presente estudo utilizou Simulação de Monte Carlo (MC).

Sob o ponto de vista computacional, a Simulação de Monte Carlo exige mais processamento da máquina que o CRR. Por outro lado, MC requer menor esforço de modelagem e parametrização.

De maneira a reduzir o esforço computacional foram utilizadas técnicas de geração de número pseudo-aleatórios combinando os modelos de geração de números pseudo-aleatórios de van der Corput base 2 e a função de inversão de Moro bem como técnica de redução de variância e tempo de convergência via emprego de variáveis antitéticas, conforme descrito por Guthke e Andras (2012). Esta modelagem permitiu nos testes realizados, atingir a convergência em 100.000 simulações, enquanto que com as funções nativas do Excel isto foi atingido com maior esforço computacional, em linha com os achados de Birge (1995).

A abordagem proposta neste artigo vale-se de uma série de teorias amplamente discutidas e sedimentadas no meio acadêmico. Nenhuma premissa nova é acrescentada, procurando-se relaxar as premissas simplificadoras dos modelos de risco de crédito de Merton.

A modelagem proposta neste artigo permite uma abordagem mais flexível para que estruturas complexas de endividamento da empresa possam ser analisadas. Esta flexibilidade permite que *covenants* de endividamento possam ser acrescentandos e analisados. Outro aspecto desta abordagem é que modelos em que novos endividamentos são assumidos ao longo do tempo também podem ser analisados.

A probabilidade de *default* até o ano 5 pelo modelo CRR foi de 0,0854% enquanto que na Simulação de Monte Carlo a probabilidade de *default* encontrada foi de 0,745%.

REFERÊNCIAS

ALTMAN, E., Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy, **Journal of Finance**, v. 23, n. 4, p. 589-609, September 1968.

BIRGE, J. R. Quasi-Monte Carlo Approaches to Option Pricing, Technical Report 94-19, Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, 1995.

BLACK, F., SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, p. 637-654, 1973.

BOX, G. E. P., MULLER, M. E. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 29, n. 2, p. 610-611, 1958.

BOYLE, P. P. Options: A Monte Carlo Approach. **Journal of Financial Economics**, v. 4, p. 323-338, 1977.

BRYS, E., BELLALAH, M., MAI, H., VARENNE, F., Options, Futures and Exotic Derivatives. John Wiley, New York, 1998.

CAPINSKY, M., KOPP, E., TRAPLE, J., Stochastic Calculus for Finance, Cambridge University Press, p. 177, 2012.

COX, J., ROSS, S., RUBINSTEIN, M. Option Pricing: A simplified Approach. **Journal of Financial Economics**, v. 7, p. 229-263, 1979.

CROUHY, GALAI e MARK. A comparative analysis of current credit risk models. **Journal of Banking & Finance**, v. 24 p. 59-117, 2000.

DELIANEDIS, G., GESKE, R. The Components of Corporate Credit Spreads: Default, Recovery, Tax, Jumps, Liquidity, and Market Factors. University of California, 2001.

DUFFIE, D., SINGLETON, K., Modeling Term Structures of Defautable Bonds, **Review of Financial Studies**, v. 12, n.4, p. 687-720, 1999.

ELISABETSKY, R. Um modelo matemático para decisões de crédito no banco comercial. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1976.

GALANTI, S., JUNG, A. Low-Discrepancy Sequences: Monte Carlo Simulation of Option Prices, **Journal of Derivatives**, v. 5, n. 1, p. 63-83, 1997.

GLASSERMAN, P. Monte Carlo Methods in Financial Enginering, p. 596, Springer, 2004.

GUTHKE P., ANDRAS B., Reducing the number of MC runs with antithetic and common random fields. **Advances in Water Resources**, v. 43, p. 1-13, 2012.

HALTON, J. H. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. **Numerische Mathematik**, v. 2, p. 84-90, 1960.

HULL, J., WHITE, A., Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk, University of Toronto, 2000.

JARROW, R.A., TURNBULL, S.M. Pricing derivatives on financial securities subject to default risk. **Journal of Finance**, v. 50, p. 53-86, 1995.

JOY, C.; BOYLE, P. P.; TAN, K. S. Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance. **Management Science**, v. 42, n. 6, p. 926-938, 1996.

KANITZ, S. C. Como prever falências. Editora McGraw Hill, São Paulo, 1978.

MCCULLOUGH, B. D., WILSON, B. On the Accuracy of Statistical Procedures in Microsoft Excel 2000 and Excel XP, **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 40, p. 713-721. 2002.

MERTON, R. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. **Journal of Finance**, v. 29, MIT (1974), p. 449-470, 1974.

MORO, B. The Full Monte, **Risk**, v. 8, n. 2, p. 57-58, 1995.

NIEDERREITER, H. Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, v.63, p. 241, 1992.

PASCHOARELLI, R. Probabilidade de Default. Tese (Doutorado), Faculdade de Economia e Administração, Universidade de São Paulo, 2006.

PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, 2nd Edition, p. 994, 1992.

SCHÄFER, KOIVUSALO, Dependence of defaults and recoveries in structural credit risk models, **Economic Modelling**, v. 30, p. 1–9, 2013.

SILVA, J. P. da. Análise financeira das empresas. Editora Atlas, São Paulo, 2001.

VOSE, D., Risk Analysis: A Quantitative Guide, John Wiley & Sons, 2nd Edition, p. 418, 2000.

YEH, LIN e HSU. A hybrid KMV model, random forests and rough set theory approach for credit rating. **Knowledge-Based Systems**, v. 33, p. 166–172, 2012.

Recebido em 05/06/2013
Aprovado em 21/08/2013
Disponibilizado em 23/10/2013
Avaliado pelo sistema *double blind review*